1. Schulaufgabe aus der Mathematik am 29.11.2011

Name, F W 12 F

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_a : x \mapsto f_a(x); D_{f_a} = IR, \quad f_a(x) = \frac{1}{8} \cdot (x-4)^2 \cdot (x+a)$ mit $a \in$ IR. **BE**

Die Graphen der Funktionen f_a in einem kartesischen Koordinatensystem heißen G_{f_a}.

1.1.0 **Zunächst (bis *aus*schließlich Aufgabe 1.2) sei a =2. Zur Funktion f_2 gehört der Funktionsterm**

$$f_2(x) = \frac{1}{8}(x-4)^2 \cdot (x+2) \quad \textbf{bzw.} \quad f_2(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32).$$

1.1.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f_2 und deren Vielfachheit an. **2**

1.1.2 Ermitteln Sie für den Graphen G_{f_2} Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte. **6**

1.1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_{f_2}. **3**

1.1.4 Skizzieren Sie den Graphen G_{f_2} mit Hilfe bisheriger Ergebnisse für $-2{,}5 \le x \le 6$;
Berechnen Sie dazu noch die Werte $f_2(-2{,}5)$ *und* $f_2(6)$. **3**

1.1.5 Ermitteln Sie die Gleichung der Wendetangente an G_{f_2} **4**

1.2.0 **Nun ist a $\in$ IR beliebig! Gegeben sind also die reellen Funktionen**

$f_a : x \mapsto f_a(x); D_{f_a} = IR, \quad f_a(x) = \frac{1}{8} \cdot (x-4)^2 \cdot (x+a)$ mit $a \in$ IR.

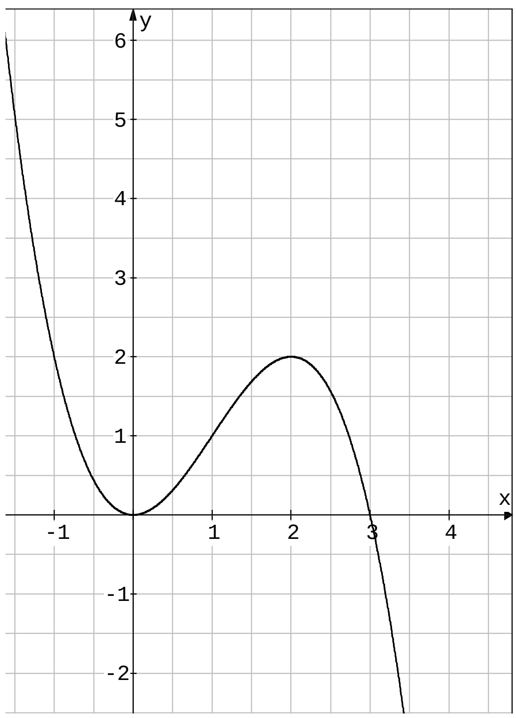
1.2.1 Zeigen Sie, dass gilt: $f_a(x) = \frac{1}{8} \cdot [(x^3 + (a-8) \cdot x^2 + (16-8a) \cdot x + 16a)]$ **2**

1.2.2 Bestimmen Sie a so, dass der zugehörige Graph bei x = – 2 ein Extremum besitzt, und ermitteln Sie die Art des Extremums. **5**

2. Gegeben ist der Graph einer Funktion g´ (siehe rechts). Tragen Sie eine Skizze der beiden Graphen von g und g´´ ein.

Beschriften Sie Ihre Graphen mit G_g und $G_{g''}$, und verwenden Sie dabei ***unterschiedliche Farben.***

Für g soll gelten: g(0) = 2.



5

Stochastik: Rückseite!

30

Stochastik

BE

3. Eine Optiker bietet zum Ausverkauf Brillengestelle aus irgendeinem Metall (M) und speziell aus Titan (T) an. Sie sind äußerlich nicht zu unterscheiden.
In der Auslage liegen **immer** fünf Gestelle zur Auswahl. Die Preise sind gleich.
Er besitzt noch einige Metallgestelle, aber nur noch zwei aus Titan.
Wird irgendein Brillengestell verkauft, so wird es durch ein Metallgestell ersetzt.
Es werden **nacheinander** drei Brillengestelle verkauft.

3.1 Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und geben Sie alle Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten an. **5**

3.2 Es werden nun folgende Ereignisse untersucht:
A: Es werden genau zwei M – Gestelle verkauft
B: Es werden mindestens zwei M – Gestelle verkauft
C = { MTM; MTT; TTM }.

3.2.1 Ermitteln Sie P(A) und P(B) **3**

3.2.2 Formulieren Sie C mit eigenen Worten im Sachzusammenhang. **2**

4.0 Kinder finden auf dem Dachboden Reste eines Stempelkastens. Neben einem Stempelkissen sind nur noch die beiden Buchstaben „O“ und „Z“ vorhanden.
Mit Hilfe dieser beiden Buchstaben bilden Sie nun „Wörter“ aus drei Buchstaben.

4.1 Geben Sie den feinsten Ergebnisraum an. **2**

4.2 Die Ereignisse D und F sind wie folgt definiert:

D: Das „Wort“ enthält beide Buchstaben
F: „Z“ wird häufiger verwendet als „O“

4.2.1 Geben Sie die beiden Ereignisse D und F in Mengenschreibweise an **2**

4.2.2 Sind D und F vereinbar ? Weshalb? **2**

4.2.3 Ermitteln Sie $D \cup \overline{F}$ und $\overline{\overline{D} \cap F}$ **4**

20

1. Schulaufgabe aus der Mathematik am 29.11.2011 Lösungen

Name, F W 12 F

1.1.1 $x_{1/2} = 4$ ✓ doppelt; $x_3 = -2$ einfach ✓

1.1.2 $f_2(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32)$; $f_2'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 12x)$; $f''(x) = \frac{1}{8}(6x - 12)$; $f'''(x) = \frac{3}{4}$ ✓

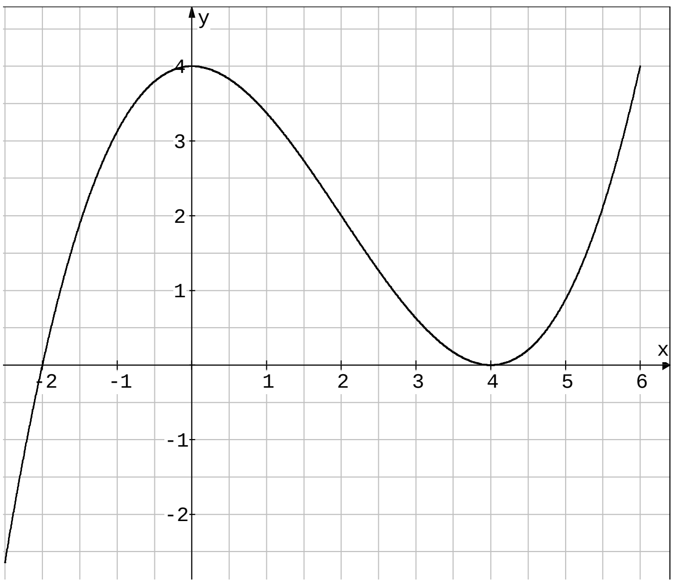
Extrema: $f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0$; ✓ $x(3x - 4) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$ ✓

$f''(0) = \frac{1}{8}(6 \cdot 0 - 12) = -\frac{3}{2} < 0$ ✓ H (0 I 4) ✓

$f''(4) = \frac{1}{8}(6 \cdot 4 - 12) = \frac{3}{2} > 0$ ✓ T (4 I 0) ✓

1.1.3 Wendepunkt(e): $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0$; ✓ $x = 2$; ✓ $f'''(2) = \frac{3}{4} \neq 0$ ✓ $\Rightarrow$ W (2 I 2) ✓

1.1.4



$f_2(-2{,}5) = -2{,}64$ ✓

$f_2(6) = 4$ ✓

Graph: ✓✓

1.1.5

$f_2'(2) = \frac{1}{8}(3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2)$

$f_2'(2) = -1{,}5$ ✓

2 LE nach links $\Rightarrow$ 3 hoch $\Rightarrow$ c = 5

{oder ausrechnen}: ✓✓

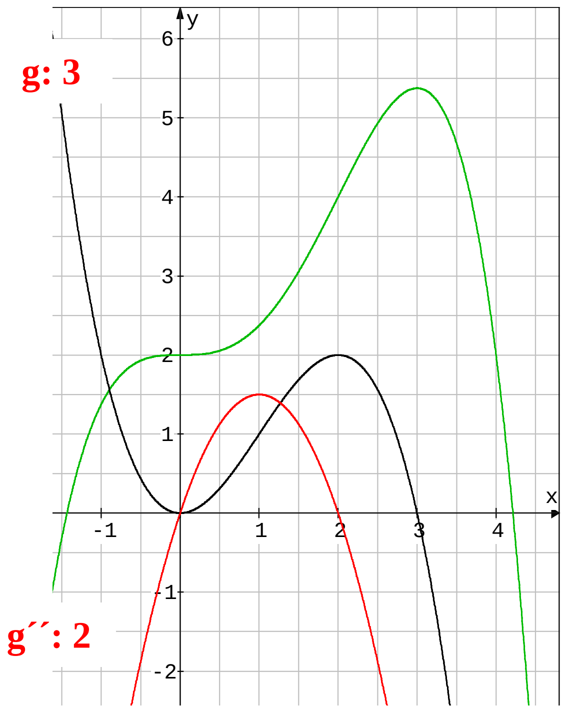
t: y = – 1,5 x + 5 ✓

1.2.1

$f_a(x) = \frac{1}{8} \cdot (x-4)^2 \cdot (x+a)$;

$f_a(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^2 - 8x + 16)^2 \cdot (x+a)$; ✓

$f_a(x) = \frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x + \frac{1}{8}ax^2 - ax + 2a$; ✓



1.2.2

$f_a'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2x + 2 + \frac{1}{4}ax - a$; ✓

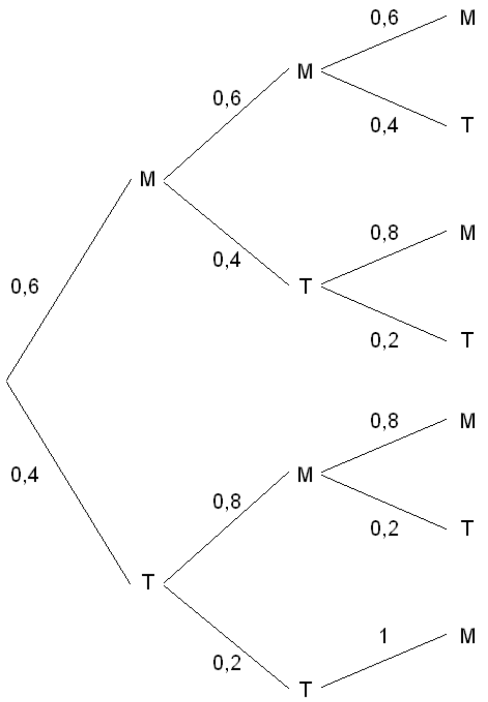
$f_a'(-2) = 1{,}5 + 4 + 2 - 0{,}5a - a \overset{!}{=} 0$ ✓

also: <u>a = 5</u> ✓

Da die einfache Nullstelle bei $x_0 = -5$ liegt
(bei 4 immer ein TP wegen LK = + 0,125),
kann es sich nur um einen Hochpunkt handeln.
oder ähnliche Argumentationen ✓✓

3.1

Struktur: ✓✓ Ω:✓ Teilwahrscheinlichkeiten: ✓ Pfadregel: ✓



ω_i	$P(\omega_i)$	A	B	C
M M M	0,216		0,216	
M M T	0,144	0,144	0,144	
M T M	0,192	0,192	0,192	x
M T T	0,048			x
T M M	0,256	0,256	0,256	
T M T	0,064			
T T M	0,08			x
Summe	1	0,592	0,808	

3.2.1 siehe Farben: P(A) = 0,592 ✓
P(B) = 0,808 ✓

3.2.2 Das zweite Gestell ist aus Titan ✓✓

4.1 Ω = { OOO; OOZ; OZO; ZOO; OZZ; ZOZ; ZZO; ZZZ } ✓✓

4.2.1 D = { OOZ; OZO; ZOO; OZZ; ZOZ; ZZO } ✓
F = { OZZ; ZOZ; ZZO; ZZZ } ✓

4.2.2

	D	$\overline{D}$	
F	OZZ;ZOZ; ZZO	ZZZ	OZZ; ZOZ; ZZO; ZZZ
$\overline{F}$	OOZ; OZO; ZOO	OOO	OOO; OOZ; OZO; ZOO
	OOZ; OZO; ZOO; OZZ; ZOZ; ZZO	OOO; ZZZ	Ω

$D \cap F \neq \{\}$, also vereinbar ✓✓

4.2.3

$D \cup \overline{F} = \Omega \setminus \{ZZZ\}$ ✓✓

$\overline{D \cap F} = \Omega \setminus \{ZZZ\}$ ✓✓