Name :

Analysis

1.1 Gegeben ist eine ganzrationale Funktion h vierten Grades; ihr Graph besitzt an der Stelle $x_w = 0$ eine Wendestelle. Durch diese Wendestelle verläuft eine Normale mit der Normalengleichung $n(x) = \frac{1}{2}x + 4$. Eine Terrassenstelle befindet sich bei $x = 4$.
Geben Sie alle Bedingungen und Gleichungen an, welche zur Bestimmung des Funktionsterms $h(x)$ nötig sind, **OHNE DIE GLEICHUNGEN ZU LÖSEN**. (7)

1.2.0 Der Funktionsterm $h(x)$ kann durch $h(x) = -\frac{1}{64}\left(x^2 - 8x + 16\right)\cdot\left(x^2 - 16\right)$ oder $h(x) = -\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - 2x + 4$ angegeben werden, ein Nachweis ist nicht erforderlich.

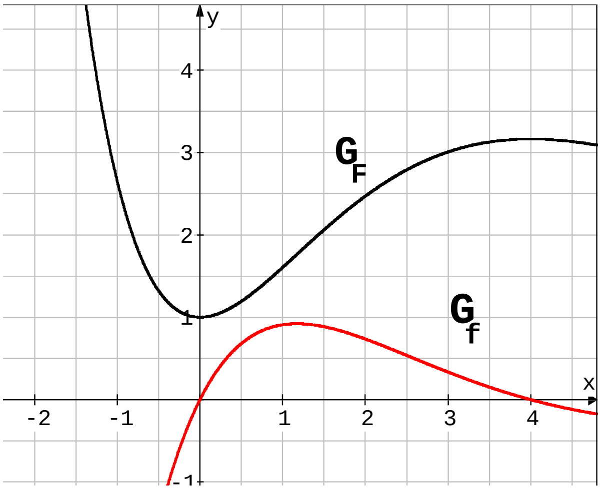
1.2.1 Bestimmen Sie die Nullstellen des Graphen G_h und ihre Vielfachheiten. Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen G_h mit der y – Achse an. (4)

1.2.2 Bestimmen Sie Art und Lage des Extrempunktes des Graphen G_h. (7)

1.2.3 Skizzieren Sie unter Verwendung aller bekannten Punkte den Graphen G_h. (3)

1.2.4 Die x – Achse, die y – Achse und der Graph G_h schließen im **2. Quadranten** die Fläche A_1 ein. Schraffieren Sie A_1 und berechnen Sie deren Inhalt. (4)

2.0 Gegeben sind die beiden Funktionen f mit dem Graphen G_f und die Funktion F mit dem Graphen G_F. (es handelt sich NICHT um ganzrationale Funktionen – siehe Zeichnung).



2.1 Ein Schüler hat sich die beiden Graphen ausdrucken lassen, und ist sich nicht mehr sicher, ob er sie richtig beschriftet hat. Begründen Sie mit Hilfe der Zeichnung, dass seine Entscheidung richtig ist. (Also: G_F ist der Graph der Stammfunktion und G_f der Graph der ursprünglichen Funktion – und nicht umgekehrt) (2)

2.2 Der Graph G_f und die x – Achse schließen im 1. Quadranten die Fläche A_2 ein.
Schraffieren Sie die Fläche A_2 farbig (nicht rot) und geben Sie auf eine Nachkommastelle genau ihren Flächeninhalt an. Begründen Sie Ihre Entscheidung. (3)

Σ Analysis :30

Das Angabenblatt bitte auch abgeben!!!

Bitte wenden!

Lösungen

1.1 $h(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$; $h'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$; $h''(x)=12ax^2+6bx+c$ ✓

$x_w=0$: $h''(0)=0 \Rightarrow c=0$ ✓

$n(x)=\frac{1}{2}x+4$: $h(0)=4 \Rightarrow e=4$ ✓

$h'(0)=-2$ ✓ $\Rightarrow d=-2$ ✓

$x=4$: $h'(4)=0 \Rightarrow 4a\cdot 4^3+3b\cdot 4^2-2=0 \Rightarrow 256a+48b-2=0$ ✓

$h''(4)=0 \Rightarrow 12a\cdot 4^2+6b\cdot 4=0 \Rightarrow 192a+24b=0$ ✓

1.2.1 $h(x)=0 \Rightarrow x^2-8x+16=0 \Rightarrow x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot1\cdot16}}{2\cdot1}=4$ ✓ oder $x^2-16=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm4$ ✓

$\Rightarrow x_1=-4$ einfach und $\Rightarrow x_2=+4$ dreifach ✓ $h(0)=4 \Rightarrow B_h(0\,|\,4)$ ✓

1.2.2 $h(x)=-\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{8}x^3-2x+4$ $h'(x)=-\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{8}x^2-2$ $h''(x)=-\frac{3}{16}x^2+\frac{3}{4}x$ ✓

$h'(x)=0 \Rightarrow -\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{8}x^2-2=0 \,|\cdot(-16) \Rightarrow x^3-6x^2+32=0$ ✓

$(x^3-6x^2+32):(x-4)$ ✓ $=x^2-2x-8$ ✓ $x^2-2x-8=0$ ✓

$-(x^3-4x^2)$ $\Rightarrow x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-8)}}{2\cdot1}$

$-2x^2+0x$ $\Rightarrow x_1=4$ Terrassenstelle und $x_2=-2$ Extremstelle

$-(-2x^2+8x)$ $h''(-2)=-\frac{3}{16}\cdot(-2)^2+\frac{3}{4}\cdot(-2)<0 \Rightarrow$ Maximum ✓

$-8x+32$ $h(-2)=-\frac{1}{64}\cdot(-2)^4+\frac{1}{8}\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)+4=6\frac{3}{4}$

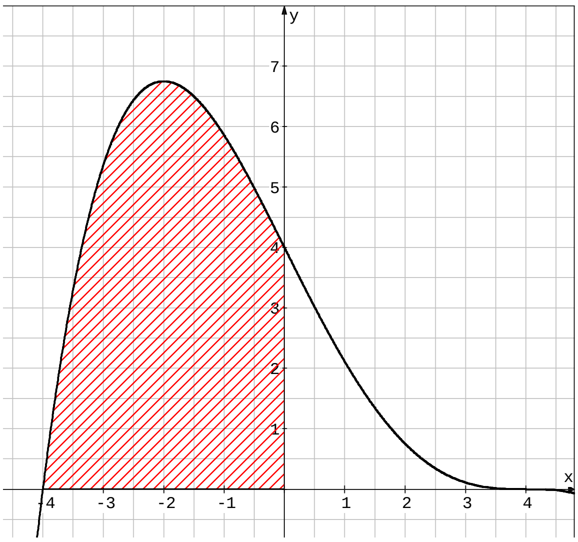
$-(-8x+32)$ $\Rightarrow H(-2\,|\,6{,}75)$ ✓

1.2.3

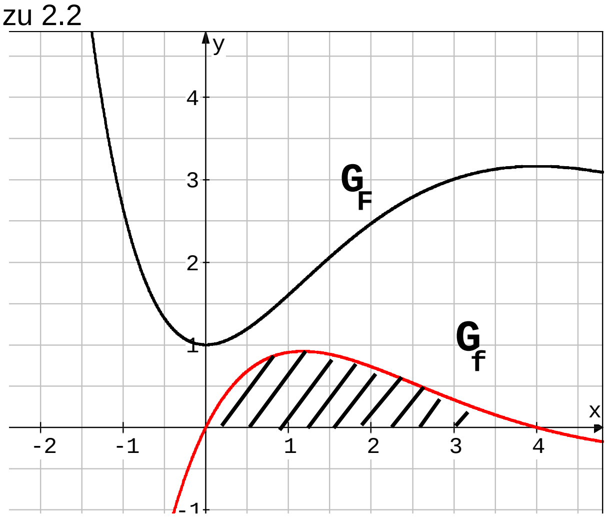
TP ✓

Werte ✓

Art: ✓



zu 2.2



1.2.4 $A=\int_{-4}^{0}h(x)dx$ ✓ $=\int_{-4}^{0}\left(-\frac{1}{64}x^4+\frac{1}{8}x^3-2x+4\right)dx=\left[-\frac{1}{320}x^5+\frac{1}{32}x^4-x^2+4x\right]_{-4}^{0}$

$=0-\left(-\frac{1}{320}\cdot(-4)^5+\frac{1}{32}\cdot(-4)^4-(-4)^2+4\cdot(-4)\right)=20{,}8\,\text{FE}$ ✓✓

2.1 Bei $x_0=0$ besitzt G_F einen Hochpunkt, und G_f eine einfache Nullstelle ✓✓, also ist G_f der Ableitungsgraph (akzeptiert werden auch gleichwertige Begründungen)

2.2 Fläche A_1 schraffieren ✓ F(4) – F(0) = 3,2 – 1 ✓ $\Rightarrow A_1 = 2{,}2$ FE ✓

{ Bem.: $f(x)=(2x-0{,}5x^2)\cdot e^{-0{,}5x}$ }

Stochastik

Sämtliche Lösungsansätze müssen erkennbar sein!

1.0 Bei einem Modelcasting bewerben sich pro Sendung drei Mädchen.
Die Zufallsgröße *X* gibt die Anzahl der Mädchen an, welche einen Vertrag erhalten.
Im Schnitt werden zwei Mädchen angenommen.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße *X* lässt sich mit Hilfe der Parameter $a, b \in [0; 1]$ wie folgt darstellen:
Die Berechnungen dürfen auf diesem Angabenblatt (freie Zellen) oder auf dem karierten Rechenblatt durchgeführt werden.

x_i	0	1	2	3	
$P(X = x_i)$	0,04	a	0,44	b	

1.1 Berechnen Sie die Parameter a und b. (4)
(Teilergebnis: a = 0,22)

1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Werte der Zufallsgröße *X* innerhalb der einfachen Standardabweichung σ um den Erwartungswert liegen. (4)

Die Bezeichnungen „Schüler“ und „Klassenkameraden“ werden im Folgenden geschlechtsneutral verwendet.

2.0 15 Klassenkameraden beschließen, sich bei einem Casting für Sänger anzumelden.
Erfahrungsgemäß werden 75% aller Bewerber eingeladen.
Sie verabreden, dass sich die Eingeladenen in einer Kneipe treffen werden.
Ermitteln Sie jeweils auf ***fünf*** Stellen nach dem Komma gerundet folgende Wahrscheinlichkeiten:

2.1 A: Alle 15 Schüler kommen zum Treffen (weil sie eine Einladung bekommen haben). (2)

2.2 B: Es werden mindestens 7, aber weniger als 13 Schüler eingeladen (3)

2.3 C: Es werden genau 10 eingeladen; die 10 Eingeladenen stehen in der alphabetischen Auflistung der 15 Bewerber in direkter Reihenfolge hintereinander. (3)

2.4 Die Kneipe ist sehr beliebt und deshalb meistens überfüllt.
Wie viele Plätze müssen vorsorglich reserviert werden, damit das Risiko, dass nicht jeder einen Platz bekommt, höchstens 10% beträgt ? (4)

Σ Stochastik :20

Stochastik Lösungen

1.1 $\sum_{i=0}^{3} P(X = x_i) = 1 \quad \Rightarrow 0{,}04 + a + 0{,}44 + b = 1$ ✓ $\quad 0{,}48 + a + b = 1 \quad (I)$

$\mu = E(X) = 2: \quad \Rightarrow 0 \cdot 0{,}04 + 1 \cdot a + 2 \cdot 0{,}44 + 3 \cdot b = 2$ ✓ $\quad 0{,}88 + a + 3b = 2 \quad (II)$

$(II) - (I): \quad 0{,}4 + 2b = 1 \quad \Rightarrow b = 0{,}3$ ✓

in $(I): 0{,}48 + a + 0{,}3 = 1 \quad \Rightarrow a = 0{,}22$ ✓

1.2 $P(E(X) - \sigma(X) < X < E(X) + \sigma(X))$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

$E(X^2) = 0^2 \cdot 0{,}04 + 1^2 \cdot 0{,}22 + 2^2 \cdot 0{,}44 + 3^2 \cdot 0{,}3 = 4{,}68$ ✓

$Var(X) = 4{,}68 - 2^2 = 0{,}68$

$\Rightarrow \sigma(X) = \sqrt{0{,}68} = 0{,}82$ ✓

$P(2 - 0{,}82 < X < 2 + 0{,}82)$

$= P(1{,}18 < X < 2{,}82)$ ✓

$= P(X = 2) = 0{,}44$ ✓

2.0 $n = 15 \quad p = 0{,}75$

2.1 k = 15: $P(A) = P(X = 15) = 0{,}01336$ ✓✓ {oder mit Formel elementar}

2.2 k= 7; 8; ...;12; $P(X \le 12) - P(X \le 6) = 0{,}76391 - 0{,}00419$ ✓✓; P(B)=0,75972 ✓

2.3 $P(C) = 6 \cdot 0{,}75^{10} \cdot 0{,}25^5; \quad P(C) = 0{,}00033$ Faktor 6:✓ richtige Potenzen✓ Ergebnis: ✓

2.3 $P(X \ge k) \le 0{,}1 \quad P(X \le k) \ge 0{,}9$ ✓

$\sum_{i=0}^{k} B(15;0{,}75;i) \ge 0{,}9$ ✓ TW $\Rightarrow k = 13$ ✓✓

ODER: P(X=14) + P(X=15) = 0,08018 (also weniger als 10% Risiko);
zusammen mit P(X=13) wären es 23,6%