2. Schulaufgabe aus der Mathematik am 7.05.2012, Name, T11 A / B

1.0 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS): **BE**

$x + ay - z = -2a$ (1)

$x - 3y + 2z = 0$ (2)

$y + z = 4$ (3)

1.1 Lösen Sie das LGS in IR. Es genügt, nur eine der drei Variablen (also x, y, ODER z) in Abhängigkeit von a zu ermitteln. **5**

1.2 Lösen Sie anschließend das LGS für a = 0. **3**

1.3 Geben Sie für den Fall, dass dieses LGS keine eindeutige Lösung besitzt, die Anzahl der Lösungen an. **2**

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen g_c durch $g_c(x) = \frac{1}{16}\left(x^3 - \frac{c}{2}x^2\right)$ mit $c \in \Re \wedge c > 0$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_g bezeichnet.

2.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von g_c in Abhängigkeit von c. **4**

2.2 Bestimmen Sie mit Hilfe von 2.1 die maximalen Intervalle, in denen die Funktion g_c positive bzw. negative y – Werte besitzt (evtl. kleine Skizze). **2**

2.3 Bestimmen Sie nun c > 0 so, dass bei x = 6 eine Nullstelle vorliegt. **2**

3.0 Sei nun $f_{12}(x) = \frac{1}{64}\left(x^4 - 8x^3\right)$.
Es gilt: $f_{12}'(x) = g_{12}(x)$, also: g ist die erste Ableitung von f **(siehe Aufgabe 2).**

3.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f_{12}. **2**

3.2 Geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_{f12} an. (Hinweis: 2.2 für den Fall c = 12 beachten!). **4**

3.3 Berechnen Sie $f_{12}(-2)$. Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_{f12} für $-2 \leq x \leq 8$ in ein Koordinatensystem. **3**

Maßstab auf beiden Achsen: 1LE $\widehat{=}$ 1cm.

4.0 Gegeben ist eine ganz – rationale Funktion h mit den angegebenen Eigenschaften:

Die Funktion h hat den Grad 4. Der Graph G_h ist symmetrisch zur y – Achse.

Bei x = 2 ist eine Wendestelle; die zugehörige Wendetangente hat die Gleichung

$t : y = 2{,}4 - 3{,}2x$

4.1 Geben Sie alle Bedingungen und Gleichungen an, welche zur Bestimmung des Funktionsterms $h(x)$ nötig sind, **OHNE DIE GLEICHUNGEN ZU LÖSEN**. **6**

Lösungen

1 1) $x + ay - z = -2a$ (1)

$x - 3y + 2z = 0$ (2)

$y + z = 4$ (3) | *3

(1) – (2) $(a+3)y - 3z = -2a$ (4) ✓

$3y + 3z = 12$ (3´) ✓

(3´) + (4) $(a+6)y = 12 - 2a$ ✓ $y = \frac{12-2a}{a+6}$ ✓ für $a \neq -6$ ✓

1.2) $a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ ✓ in (3) $\underline{\underline{z = 2}}$ ✓ in (1) $\underline{\underline{x = 2}}$ ✓

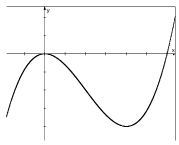
1.3) $a = -6$: $0 = 24$ (f) ✓ $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\}}}$ ✓

2.1

g (x) = 0: ✓ $x^2\left(x - \frac{c}{2}\right) = 0$ ✓ $\Rightarrow$ $x_{1/2} = 0$ ✓; $x - \frac{c}{2} = 0 \Rightarrow$ $x_3 = \frac{c}{2}$ ✓

2.2

✓ ✓ c > 0:	x	x <0	0	$0<x<\frac{c}{2}$	$\frac{c}{2}$	$c > \frac{c}{2}$
	g_c (x)	< 0	0	< 0	0	> 0



2.3

Bei $x_3 = \frac{c}{2}$ ✓ist $g_c(x) = 0$ $c = 12$ ✓

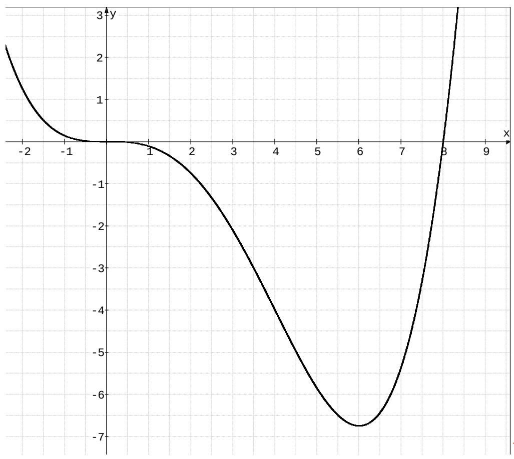
3.1 $f_{12}(x) = 0$; $\frac{1}{64}\left(x^4 - 8x^3\right) = 0$; $x^3(x-8) = 0$✓

$\Rightarrow$ $x_{1/2/3} = 0$ ✓ und $x_3 = 8$

3.2 aus 1.3 und 1.4 folgt T (6 | y_T) ✓ ✓

Da $f_{12}(6) = -6{,}75$ ✓ $\Rightarrow$ T (6 | – 6,75) ✓

3.3 $f_{12}(-2) = 1{,}25$✓, Skizze →



✓ ✓

4.1 $h(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $h´(x) = 4ax^3 + 2bx$; $h´´(x) = 12ax^2 + 2b$ ✓

Aus t: $g(2) = -4$ ✓; $g´(2) = -3{,}2$✓, also:

$h´´(2) = 0$: $48a + 2b = 0$ (1)✓

$h(2) = -4$: $16a + 4b + c = -4$ (2)✓

$h´(2) = -3{,}2$: $32a + 4b = -3{,}2$ (3)✓

2. Schulaufgabe aus der Mathematik am 7.05.2012, Name, T11 A / B

		BE
1.0	Gegeben ist das lineare Gleichungssystem (LGS):	
	$-x + ay + z = -2a$ (1)	
	$2x - 3y + z = 0$ (2)	
	$x + y = 4$ (3)	
1.1	Lösen Sie das LGS in IR. Es genügt, nur eine der drei Variablen (also x, y, ODER z) in Abhängigkeit von a zu ermitteln.	**5**
1.2	Lösen Sie anschließend das LGS für a = 0.	**3**
1.3	Geben Sie für den Fall, dass dieses LGS keine eindeutige Lösung besitzt, die Anzahl der Lösungen an.	**2**
2.0	Gegeben sind die reellen Funktionen g_c durch $g_c(x) = \frac{1}{16}\left(x^3 + \frac{c}{2}x^2\right)$ mit $c \in \Re \wedge c < 0$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_g bezeichnet.	
2.1	Bestimmen Sie die Nullstellen von g_c in Abhängigkeit von c.	**4**
2.2	Bestimmen Sie mit Hilfe von 2.1 die maximalen Intervalle, in denen die Funktion g_c positive bzw. negative y – Werte besitzt (evtl. kleine Skizze).	**2**
2.3	Bestimmen Sie nun c < 0 so, dass bei x = 6 eine Nullstelle vorliegt.	**2**
3.0	Sei nun $f_{-12}(x) = \frac{1}{64}\left(x^4 - 8x^3\right)$. Es gilt: $f_{-12}'(x) = g_{-12}(x)$, also: g ist die erste Ableitung von f **(siehe Aufgabe 2).**	
3.1	Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f_{-12}.	**2**
3.2	Geben Sie Art und Koordinaten des Extrempunktes von G_{f-12} an. (Hinweis: 2.2 für den Fall c = – 12 beachten!).	**4**
3.3	Berechnen Sie $f_{-12}(-2)$. Skizzieren Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen G_{f-12} für $-2 \le x \le 8$ in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: 1LE $\hat{=}$ 1cm.	**3**
4.0	Gegeben ist eine ganz – rationale Funktion h mit den angegebenen Eigenschaften: Die Funktion h hat den Grad 4. Der Graph G_h ist symmetrisch zur y – Achse. Bei x = 2 ist eine Wendestelle; die zugehörige Wendetangente hat die Gleichung $t: y = -2{,}4 + 3{,}2x$	
4.1	Geben Sie alle Bedingungen und Gleichungen an, welche zur Bestimmung des Funktionsterms $h(x)$ nötig sind, **OHNE DIE GLEICHUNGEN ZU LÖSEN**.	**6**

Lösungen

1.1) $-x + ay + z = -2a$ (1)

$2x - 3y + z = 0$ (2)

$x + y = 4$ (3) | *3

(1) – (2) $(a+3)y - 3x = -2a$ (4) ✓

$3y + 3x = 12$ (3´) ✓

(3´) + (4) $(a+6)y = 12 - 2a$ ✓ $y = \frac{12-2a}{a+6}$ ✓ für $a \neq -6$ ✓

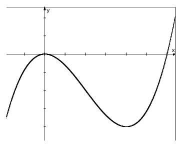
1.2) $a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ ✓ in (3) $\underline{\underline{x = 2}}$ ✓ in (1) $\underline{\underline{z = 2}}$ ✓

1.3) $a = -6$: $0 = 24$ (f) ✓ $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbb{L} = \{\ \}}}$ ✓

2.1 g (x) = 0: ✓ $x^2\left(x + \frac{c}{2}\right) = 0$ ✓ $\Rightarrow$ $x_{1/2} = 0$ ✓; $x + \frac{c}{2} = 0 \Rightarrow$ $x_3 = -\frac{c}{2}$ ✓

2.2

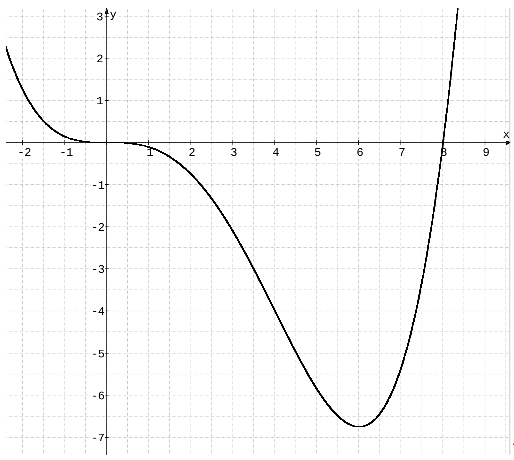
✓✓ c < 0:	x	x <0	0	$0<x<-\frac{c}{2}$	$-\frac{c}{2}$	$c > -\frac{c}{2}$
	g_c (x)	< 0	0	< 0	0	> 0



2.3 Bei $x_3 = -\frac{c}{2}$ ✓ist $g_c(x) = 0$ $c = -12$ ✓

3.1 $f_{12}(x) = 0$; $\frac{1}{64}\left(x^4 - 8x^3\right) = 0$; $x^3(x-8) = 0$ ✓

$\Rightarrow$ $x_{1/2/3} = 0$ ✓ und $x_3 = 8$



3.2 aus 1.3 und 1.4 folgt T (6 | y_T) ✓ ✓

Da $f_{12}(6) = -6{,}75$ ✓ $\Rightarrow$ T (6 | – 6,75) ✓

3.3 $f_{12}(-2) = 1{,}25$✓, Skizze → ✓ ✓

4.1 $h(x) = ax^4 + bx^2 + c$; $h´(x) = 4ax^3 + 2bx$; $h´´(x) = 12ax^2 + 2b$ ✓

Aus t: g(2) = 4 ✓; g´(2) = 3,2✓, also:

h´´(2) = 0: $48a + 2b = 0$ (1)✓

h(2) = 4: $16a + 4b + c = 4$ (2)✓

h´(2) = 3,2: $32a + 4b = 3{,}2$ (3)✓