Klassen FT12abc
1. Schulaufgabe aus der Mathematik
3.12.2010

Analysis

1.0 Gegeben ist die Funktion f durch den Term

$$f(x) = \frac{-3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 15x + 18}{2x^2 + 8x + 8} \text{ mit } x \in D_f$$

und dem Graphen G_f.

1.1 Zeigen Sie, dass man den Funktionsterm auch folgendermaßen schreiben kann: (4 BE)

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2}$$

1.2 Geben Sie die maximal mögliche Definitionsmenge D_f, die Art der Definitionslücke und die Gleichungen aller Asymptoten(kurven) an. (5 BE)

1.3 Begründen Sie rechnerisch, dass f im Intervall [1;2] eine Nullstelle haben muss, und berechnen Sie diese mittels des Newton-Verfahrens auf zwei Dezimalen (Startwert: $x_1 = 1$; zwei Schritte). (7 BE)

1.4 Berechnen Sie die ersten drei Ableitungen von f. (4 BE)

(*Teilergebnis:* $f''(x) = -3 + \frac{3}{(x+2)^3}$)

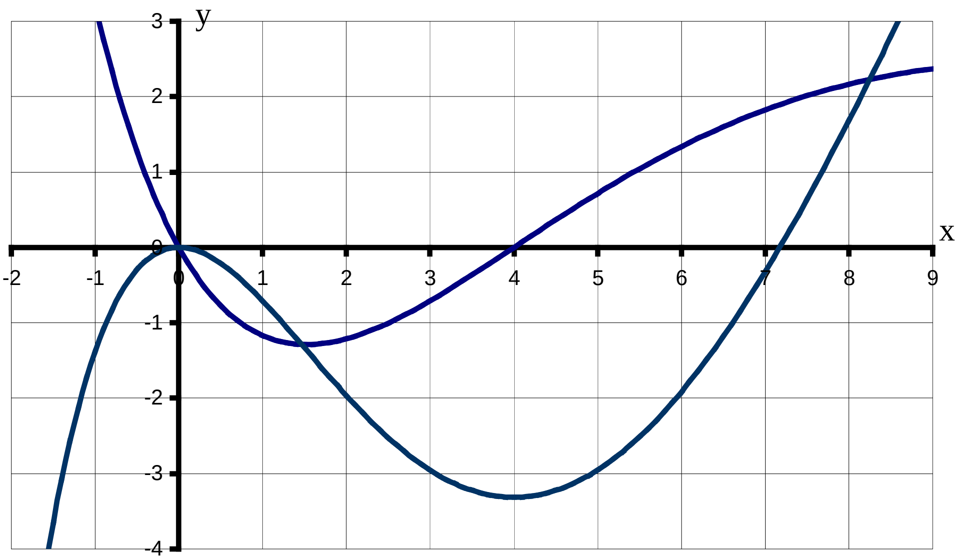
1.5 Ermitteln Sie den Wendepunkt von G_f. (6 BE)

1.6 Gegeben ist außerdem die Funktion g: $x \rightarrow \frac{3}{2x+4}$ mit $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ und dem Graphen G_g.

1.6.1 Ermitteln Sie die Schnittpunkte von G_f und G_g und zeigen Sie, dass $f(0) > g(0)$ ist. (5 BE)

1.6.2 Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche G_f und G_g einschließen. (4 BE)

2.0 Gegeben ist eine Funktion h mit dem Graphen G_h und die Integralfunktion $H_0(x)$: $x \rightarrow \int_0^x h(t)dt$ mit dem Graphen G_H; die beiden Graphen sind unten dargestellt:



2.1 Wie man sieht, fehlt die Beschriftung der Graphen; beschriften Sie die beiden Graphen richtig und begründen Sie Ihre Entscheidung *kurz.* (2 BE)

2.2 Markieren Sie im Diagramm die Fläche, die G_h mit der x-Achse im 4. Quadranten einschließt, und geben Sie ihren Inhalt auf eine Nachkommastelle genau an; begründen Sie Ihre Antwort. (3 BE)

Geometrie

1.0 Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Punkte A(1;2;3), B(3;4;2), C(3;1;5), D(2d; –4; –5+d).

1.1 Zeigen Sie, dass die beiden Dreiecksseiten c = [AB] und b = [AC] senkrecht aufeinander stehen. (4 BE)

1.2 Ermitteln Sie die Größe des Innenwinkels $\beta = \sphericalangle CBA$.
Welches besondere Dreieck liegt also vor? (5 BE)

1.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC. (3 BE)

1.4 Zeigen Sie, dass das Volumen der Pyramide ABCD unabhängig von der Wahl von d immer den Wert V = 13,5 VE annimmt.
Was bedeutet das geometrisch für die Menge alle Punkte D? (5 BE)

Musterlösung Analysis

1.1

$(-3x^4 - 12x^3 - 9x^2 + 15x + 18):(2x^2 + 8x + 8) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3x+6}{2x^2+8x+8}$

$-(-3x^4 - 12x^3 - 12x^2)$ $\quad = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3(x+2)}{2(x+2)^2} = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+2}$ ✓✓

---------------------- ✓✓

$3x^2 + 15x + 18$

$-(3x^2 + 12x + 12)$

$3x + 6$

1.2 $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$ ✓; $x_1 = -2$ ist Pol ✓ 1. Ordnung (mit VZW) ✓;

senkrechte Asymptote: $x = -2$ ✓; Asymptotenkurve: $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$ ✓

1.3 $f(1) = \frac{1}{2} > 0$; $f(2) = -4{,}125 < 0$ ✓

f wechselt im Intervall [1;2] das Vorzeichen (und ist stetig) ➔ f hat in diesem Intervall (mindestens) eine Nullstelle ✓

$f(x) = 0$ ➔ $p(x) = -x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = 0$ (Zähler durch 3!); $p'(x) = -4x^3 - 12x^2 - 6x + 5$ ✓✓

➔ $x_{n+1} = x_n - \frac{-x_n^4 - 4x_n^3 - 3x_n^2 + 5x_n + 6}{-4x^3 - 12x^2 - 6x + 5}$ ✓

$x_1 = 1$ ➔ $x_2 = 1 - \frac{-1^4 - 4\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 6}{-4\cdot 1^3 - 12\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 5} = \frac{20}{17} \approx 1{,}18$ ✓; $x_3 = \ldots \approx 1{,}15$ ✓

(alternativ: $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2x+4} = 0 \mid \cdot (2x+4) \mid : 3$ ➔ $p(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 3 = 0$ ➔ *...)*

1.4 $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}(x+2)^{-1}$ ✓ ➔ $f'(x) = -3x - \frac{3}{2}(x+2)^{-2}$ ✓;

$f''(x) = -3 + 3(x+2)^{-3} = -3 + \frac{3}{(x+2)^3}$ ✓; $f'''(x) = -9(x+2)^{-4} = -\frac{9}{(x+2)^4}$ ✓

1.5 Flachstellen: $-3 + \frac{3}{(x+2)^3} = 0$ ✓➔ $-3(x+2)^3 + 3 = 0$ ✓ ➔ $(x+2)^3 = 1$ ✓ ➔ $x_1 = -1$ ✓

$f'''(-1) = -9 \neq 0$ ➔ Wendestelle ✓; $f(-1) = \frac{3}{2}$ ➔ WeP(–1; 1,5) ✓

1.6.1 $-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2x+4} = \frac{3}{2x+4}$ ✓ ➔ $-x^2 + 1 = 0$ ✓ ➔ $x_{1,2} = \pm 1$ ✓

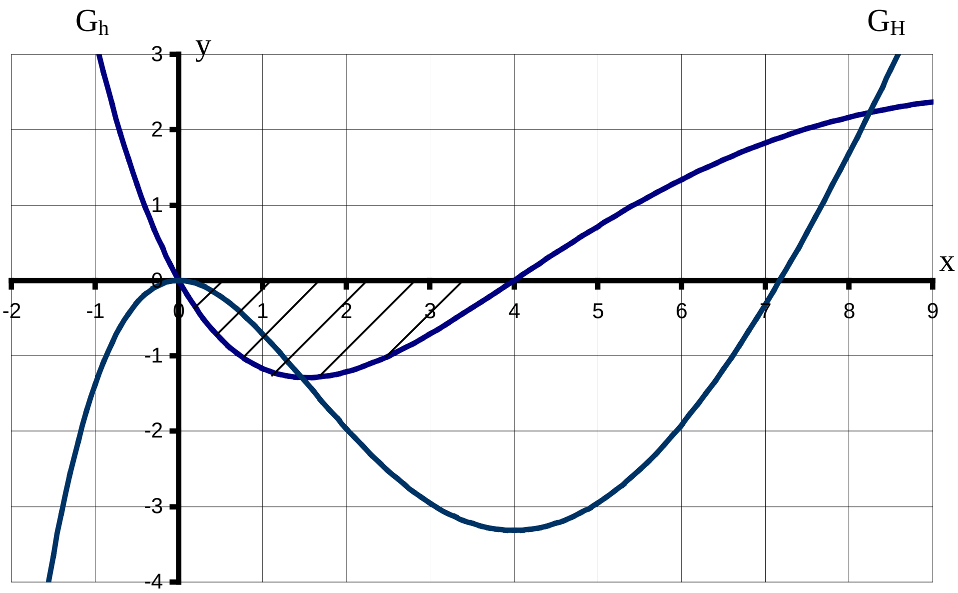
➔ $S_1(-1; 1{,}5)$ (siehe 1.5); $S_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$ (siehe 1.3) ✓

$f(0) = 2{,}25$; $g(0) = 0{,}75$ ➔ $f(0) > g(0)$ ✓

1.6.2

$A = \int_{-1}^{1}(f(x) - g(x))dx$ ✓ $= \int_{-1}^{1}(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2})dx$ ✓ $= \left[-\tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{3}{2}x\right]_{-1}^{1}$ ✓ $= 2$ ✓ *(bzw. Symmetrie ausnutzen!)*

2.1



richtige Beschriftung ✓
Begründung z. B.: G_H hat bei x = 4 eine Extremstelle, G_h hat dort eine Nullstelle ✓

2.2 richtige Schraffur: s. o. ✓

A = $-\int_0^4 h(t)dt$ = $-H_0(4)$ ✓ ≈ –(–3,3) = 3,3 ✓

Musterlösung Geometrie

1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ✓; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ✓; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 2 - 2 = 0$ ✓ ⇒ Behauptung ✓

1.2 $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}$; ✓ $\cos\beta = \dfrac{0+6+3}{3 \cdot \sqrt{0+9+9}}$ ✓; $\underline{\underline{\beta = 45^\circ}}$ ✓. Mit 1.1 ⇒ rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck ✓✓

1.3 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ ✓; $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+36+36} = 9$ ✓ ⇒ $\underline{\underline{\text{A = 4,5 FE}}}$ ✓

1.4 $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2d-1 \\ -6 \\ d-8 \end{pmatrix}$ ✓; $V_{SPyr} = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2d-1 \\ -6 \\ d-8 \end{pmatrix}\right|$ = 13,5VE ✓✓ {d fällt weg}

Da es für jeden Punkt D das gleiche Volumen ergibt, müssen alle Punkte D auf einer Geraden liegen, die parallel zur Grundfläche ABC verläuft (bzw. alle in der gleichen Höhe über dem Dreieck ABC liegen). ✓✓