2.Schulaufgabe aus der Mathematik am 11.2.2011

Name, FT 12

BE

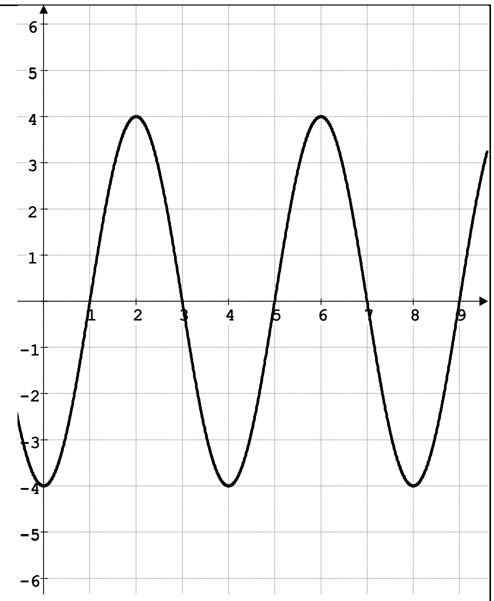
1.0 Die Achsenbeschriftung des nebenstehenden Graphen sei

(Aufgaben 1.1 bis 1.3)

x und y

(Aufgaben 2.1 und 2.2)

t in s und v(t) in $\frac{m}{s}$.



1.1 Entnehmen Sie dem Graphen die Periode und die Amplitude. p = A = **2**

1.2 Geben Sie eine Gleichung der rechts gezeichneten Funktion f an. **2**

f(x) =

1.3 Bestimmen Sie die Amplituden der Ableitungsfunktion f´ und derjenigen Stammfunktion F, für die gilt: F´(x) = f(x) und F(0) =0. **5**
Tragen Sie in die Zeichnung farbig die Graphen der beiden Funktionen ein. Zeichenbereich: $0 \le x \le 8$

2.0 Beschriften Sie die Achsen für den vorgegebenen Graphen jetzt mit t in s und v(t) in $\frac{m}{s}$.
Die angegebene Bewegung soll einem Feder – Schwere – Pendel zugeordnet werden.

2.1 Interpretieren Sie die physikalische Bedeutung der Funktionen F und f ´. **2**

2.2 Geben sie zur Zeit t = 0 die Position der Masse, sowie deren Bewegungsrichtung an. **2**

3.0 Gegeben ist die gebrochen-rationale Funktion f_a durch die Gleichung:

$f_a(x) = \frac{(x+a)(x-2)}{(x-4)(x-5)^2}$ im maximalen Definitionsbereich; $a \in \mathbb{R} \wedge a < 0$

3.1 Bestimmen Sie Art und Lage der Nullstellen und der Definitionslücken in Abhängigkeit von a. **6**

4.0 g (der Graph sei G) ist die einfachste gebrochen-rationale Funktion mit folgenden Eigenschaften:
Die Asymptote für $|x| \to \infty$ ist gegeben durch: a_1: y = 2
g besitzt eine einfache Nullstelle bei $x_1 = -1$und eine doppelte Nullstelle bei $x_2 = 5$.
a_2: x = 0 ist Pol 2. Ordnung , a_3: x = 2 ist Pol 1. Ordnung für G.
Außerdem besitzt g bei x = 3 eine stetig hebbare Definitionslücke.

4.1 Geben Sie eine Gleichung von g an. (Bitte nicht umrechnen!) **6**

5.0 Gegeben ist jetzt die Funktion k mit der Funktionsgleichung $k(x) = \frac{2x^2 - 12x}{(x-3)^2}$ in ID = IR \ { 3 }

5.1 Stellen Sie die Funktion k in der Asymptotenform dar, und geben Sie die Gleichungen und Art aller Asymptoten von G_k an. **5**

5.2 Berechnen Sie die Nullstellen von k. **3**

5.3 Skizzieren Sie G_k für $-4 \le x \le 7$. Tragen Sie auch farbig die Asymptoten mit ein. **3**

5.4 Die waagrechte Asymptote, die Gerade g: x = – 3, der Graph G_k und die y – Achse schließen im 2. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses Flächenstück, und berechnen Sie dessen Inhalt. **6**

GEOMETRIE → Rückseite!

GEOMETRIE

1.0	Gegeben sind drei Ebenen E_1, E_2 und E_3 mit den folgenden Gleichungen:	**BE**
	E_1: $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$	
	E_2: $x_1 - 2x_3 = 5$	
	E_3: $-6x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 12$	
1.1	Untersuchen Sie die Lage der Ebenen E_1 und E_3 zueinander.	**2**
1.2	Untersuchen Sie die Ebene E_2 auf Parallelität zu den Koordinatenachsen und – ebenen.	**2**
1.3	Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade s von E_1 und E_2.	**4**
1.4	Geben Sie ohne weitere Rechnung an, wie viele Schnittgeraden die Ebenen E_1, E_2 und E_3 insgesamt miteinander haben, und wie diese zueinander liegen.	**2**
2.0	Gegeben sind die Punkte A(3;5;–1), B(5;3;0), C(4;4;1) und die Gerade g mit der Gleichung g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.	
2.1	Ermitteln Sie je eine Gleichung der Ebene F, welche die Punkte A, B und C enthält, in Parameterform (Parameter μ und ν) und in Koordinatenform. (mögliches Ergebnis: F: $x_1 + x_2 = 8$)	**4**
2.2	Berechnen Sie den Schnittpunkt S und den Schnittwinkel α von g mit F.	**6**

2.Schulaufgabe aus der Mathematik am 11.2.2011 Lösungen Analysis

1.1 p = 4 ✓; A = 4 ✓

1.2 f(x) = – 4cos✓ (0,5π✓ x)

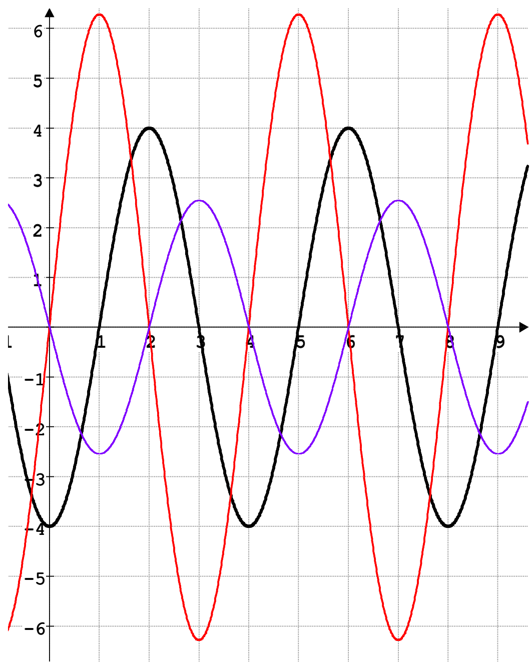
1.3 Ermittlung der Amplituden: f´(x) = 2πsin (0,5π·x); F(x) = $-\dfrac{4}{0{,}5\pi}$ sin (0,5πx)

$G_{f'}$:Verlauf ✓✓

Amplitude: (6,28) ✓

G_F Verlauf ✓

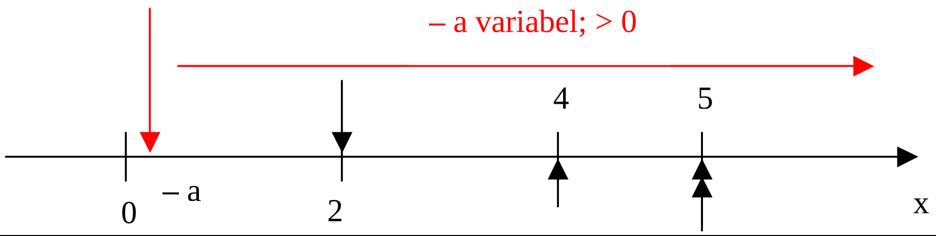
Amplitude: (2,55) ✓



2.1 Da f die Geschwindigkeit sein soll, ist F die Auslenkung✓, und f´ die Beschleunigung✓.

2.2 Nulllage✓ { F(0) = 0 } und Bewegung nach unten✓ { v < 0 }

3.1 ✓✓



x = / a =	2	4	5		
– 2	doppelte NST	Pol 1. Ord.	Pol 2. Ord		✓
– 4	einfache NST	stetig hebb. Def.-lücke	Pol 2. Ord		✓
– 5	einfache NST	Pol 1. Ord.	Pol 1. Ord		✓
sonst *	einfache NST	Pol 1. Ord.	Pol 2. Ord	x = – a einfache NST	✓

4.1 g (x) = 2✓$\cdot\dfrac{(x+1)(x-5)^2(x-3)}{x^2(x-2)(x-3)}$ x_1 ✓ x_2 ✓ P2 ✓ P1 ✓ shD ✓

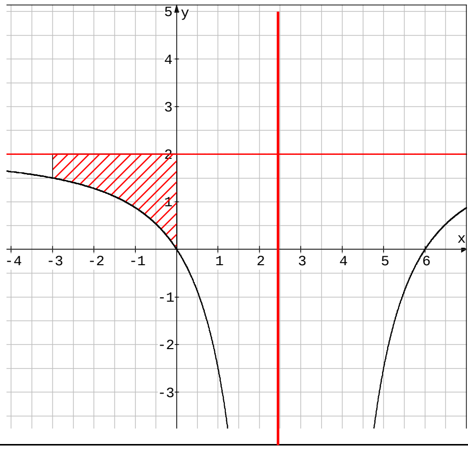
5.1 Senkrechte Asymptote a_1 : x = 3 ✓, da Nenner doppelte Nullstelle – Pol 2. Ordnung, Zähler ≠ 0.

$$k(x)=\frac{2x^2-12x}{(x-3)^2};\ k(x)=\frac{2(x^2-6x+9-9)}{(x-6x+9)}\ ✓;\ k(x)=2+\frac{-18}{(x-3)^2},\ ✓✓$$

also a_2 : y = 2 ✓ { oder PD }

5.2 $2x^2 - 12x = 0$ ✓; x·(2x – 12) = 0, also : $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ ✓ ∈ ID ✓

5.3



G✓✓

As ✓

5.4 Fläche ✓

d(x) = a_1(x) – k(x) ✓

$$d(x)=\frac{18}{(x-3)^2}\ ✓;$$

Stammfunktion $D(x)=\frac{-18}{(x-3)^1}$ ✓

D(0) – D(3) = 6 – 3 ✓, also

<u>3 FE</u>✓

GEO

1.1 $E_1 \| E_3$ ✓, weil $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} \| \ \vec{n}_3 = \begin{pmatrix}-6\\-9\\3\end{pmatrix}$ ✓ $E_2 \parallel x_2$-Achse ✓, weil $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ✓

1.2

1.3 *unterbestimmtes LGS (2 Gleichungen, 3 Variable)*

➔ *eine Variable frei wählbar;* wähle z.B. $x_3 = \lambda$ ✓

in E_2 einsetzen: $x_1 - 2\lambda = 5$ ➔ $x_1 = 5 + 2\lambda$ ✓

in E_1 einsetzen: $2(5 + 2\lambda) + 3x_2 - \lambda = 4$ ➔ $x_2 = -2 - \lambda$ ✓ zusammengefasst:

$$s:\vec{x}=\begin{pmatrix}5+2\lambda\\-2-\lambda\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\ ✓$$

1.4 Die Ebenen haben insgesamt zwei Schnittgeraden miteinander ✓; diese sind parallel zueinander. ✓

2.1 F: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$; ✓✓ $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}$ ✓ ➔ F: $-3x_1 - 3x_2 = c$

Punkt einsetzen, z. B. A ➔ c = –24 ✓ ➔ F: $-3x_1 - 3x_2 = -24$ bzw. $x_1 + x_2 = 8$

Mit a, b, c (falsch)

F: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}+\nu\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\3\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-5\\8\end{pmatrix}$ ✓ ➔ F: $3x_1 - 5x_2 + 8x_3 = c$

Punkt einsetzen, z. B. A ➔ c = –24 ✓ ➔ F: $3x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 24 = 0$

maximal 2 BE

2.2 g in F einsetzen: $(4 + \lambda) + (3 + \lambda) = 8$ ✓ ➔ $\lambda = 0{,}5$; ✓ in g einsetzen ➔ S(4,5; 3,5; 0,5) ✓

$$\sin\alpha=\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}\ ✓✓ ➔ \alpha\approx 54{,}7°\ ✓$$