3.Schulaufgabe aus der Mathematik

BT12___ Arbeitszeit: 80 Minuten 11.4.2013 Name:________________

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{k-1+e^{-x}}{\left(k-e^{x}\right)^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge D_{f_k} und $k \in \boldsymbol{R}$.

1.1.1 Ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge und die Nullstelle von f_k in Abhängigkeit von k.
(6 BE)

1.1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $|x| \to \infty$.
(3 BE)

1.2.0 Für alle weiteren Teilaufgaben gilt nun: **k = 0 !**

Die Funktion f_0 wird nur noch mit **f** bezeichnet. $f : x \mapsto \frac{-1+e^{-x}}{\left(e^{x}\right)^2}$

1.2.1 Für die 1. Ableitung von f gilt folgende Funktionsgleichung:

$$f\,'(x) = \left(2e^{x}-3\right)\cdot e^{-3x}$$

(2 BE) Beweisen Sie diese Behauptung durch eine Rechnung.

1.2.2 Ermitteln Sie die Monotonieintervalle von G_f und geben Sie Lage und Art des Extremalpunktes an.
(5 BE)

1.2.3 Begründen Sie, dass der Graph G_f die Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten im Ursprung berührt.
(3 BE)

1.2.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f und die Winkelhalbierende unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte für $-0{,}5 \leq x \leq 2$; 1LE $\widehat{=}$ 4 cm.
(4 BE)

1.3.1 Zeigen Sie, dass man den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = -e^{-2x} + e^{-3x}$ darstellen lässt.
(2 BE)

1.3.2 Der Graph G_f, die Winkelhalbierende des II. und IV. Quadranten und die Gerade mit der Gleichung x = 1 bestimmen im 4. Quadranten ein endliches Flächenstück A.
Kennzeichnen Sie im Koordinatensystem aus 1.2.4 dieses Flächenstück und berechnen Sie den Flächeninhalt von A.
(5 BE)

1.4.0 Weiter ist die Funktion $h : x \mapsto 0{,}5\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ mit $D_h = \boldsymbol{R}$ gegeben.

1.4.1 Geben Sie die Periode und Verschiebung von h an.
(2 BE)

1.4.2 Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung h(x) = − 0,25 im Definitionsbereich.
(5 BE)

1.4.3 Skizzieren Sie G_h im Koordinatensystem aus 1.2.4 **im Intervall [−2 ; 0].**
(2 BE)

1.4.4 Die Graphen G_h und G_f schneiden sich im 2. Quadranten im Punkt $B(x_B|\,y_B)$.
(5 BE) Berechnen Sie den Näherungswert von x_B mit dem Newton−Verfahren. Verwenden Sie den Startwert $x_0 = -0{,}4$.
Runden Sie alle Zwischenergebnisse auf vier Nachkommastellen und geben Sie das Endergebnis nach **einem** Näherungsschritt auf zwei Nachkommastellen gerundet an.

Bitte wenden!

2.0 Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem des R^3 die Punktmenge P_a mit $P_a\ (2 + 2a; 1 - 2a;\ 3 + a)$; $a \in IR$, die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sowie die Ebene E: $-x_1 + 4x_2 + x_3 - 4 = 0$.

2.1 Geben Sie eine Gleichung der Geraden k an, auf der alle Punkte P_a liegen und untersuchen Sie die Lage der beiden Geraden g und k zueinander.
(4 BE)

2.2 Bestimmen Sie in Koordinatenform eine Ebene F, welche die beiden Geraden g und k enthält.
(4 BE)

2.3.1 Zeigen Sie, dass sich die beiden Geraden g und h schneiden und ermitteln Sie den Schnittpunkt S. *(Teilergebnis:λ =1)*
(5 BE)

2.3.2 Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Ebene E eine Spiegelebene der beiden Geraden ist.
(6 BE)

Lösungen

1.1.1 Nenner ≠ 0: $e^x = k; x = lnk$, also ID = IR \ {ln k}
Fallunterscheidung: k > 0 ⇒ ID = IR \ {ln k}
: k < 0 ⇒ ID = IR
NST: $e^{-x} = 1 - k; -x = \ln(1-k)$, also $x = -\ln(1-k)$
Fallunterscheidung: 1 – k > 0 ⇒ k < 1 ⇒ NST: $x = -\ln(1-k)$ (einfache NST)
: 1 – k ≤ 0 ⇒ k ≥ 1 keine NST

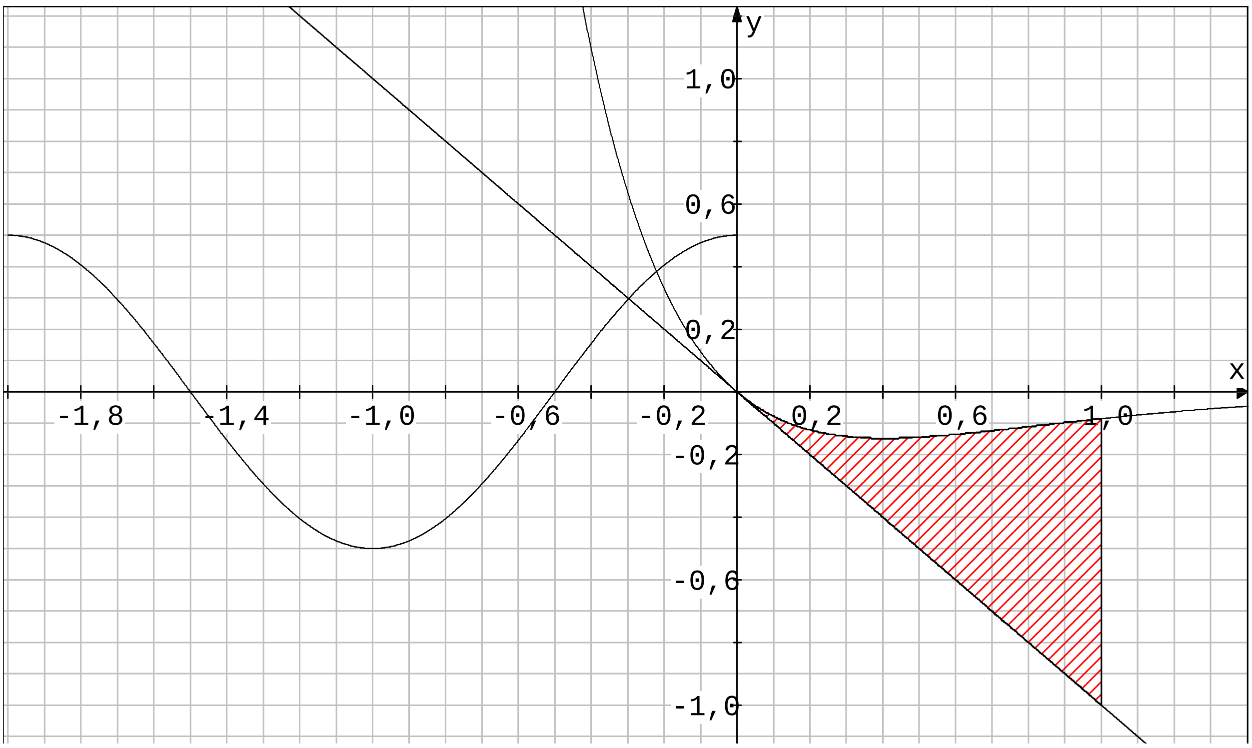
1.1.2 + ∞ : Z = k – 1 ; N „ + ∞“, also $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
– ∞ : Z = „ + ∞“, N = k^2, also $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ " $= -\infty$"

1.2.1 $f(x) = (e^{-x} - 1) \cdot e^{-2x};\ f'(x) = -e^{-x} \cdot e^{-2x} + (e^{-x} - 1) \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$
$f'(x) = -e^{-x} \cdot e^{-2x} + (-2e^{-x} + 2) \cdot e^{-2x} = -e^{-3x} - 2e^{-3x} + 2 \cdot e^{-3x} \cdot e^x$ ⇒ Beh.
Alternativ: Quotientenregel
$f(x) = \frac{-1+e^{-x}}{(e^x)^2};\ f'(x) = \frac{-e^{-x}\cdot(e^x)^2 - (-1+e^{-x})\cdot 2(e^x)\cdot e^x}{(e^x)^4}$

1.2.2 NST von f': $2e^x - 3 = 0$ $(e^{-3x} > 0; \text{ist also irrelevant für Monotonie})$
x_0 = ln(1,5) Monotonie: ↘ ln(1,5) ↗ , G_f fällt in $]-\infty;$ ln(1,5)[,G_f steigt in] ln(1,5); $+\infty$[,
also T(ln(1,5; $-\frac{4}{27}$)
NR: y – Komponente: $f(\ln(1{,}5)) = \frac{-1+e^{-ln1{,}5}}{(e^{ln1{,}5})^2} = \frac{-1+\frac{2}{3}}{1{,}5^2} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{9}{4}} = -\frac{4}{27}$

1.2.3 $f(0) = \frac{-1+e^0}{(e^0)^2}$ = 0, also P (0 ; 0);
$f'(0) = -e^{-x} \cdot e^{-2x} + (2-3) \cdot e^0 = -1$ ⇒ Beh

1.2.4
1.3.2
1.4.3



1.3.1 $f(x) = (e^{-x} - 1) \cdot e^{-2x} = e^{-3x} - e^{-2x}$ ⇒ Beh

1.3.2 $d(x) = e^{-3x} - e^{-2x} - (-x);\quad D(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{x^2}{2}$
D(1) = $-\frac{1}{3}e^{-3} + \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}$; D(0) =$-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 0$ → TR
A = D(1) – D(0) = 0,3844 FE

1.4.1 $h(x) = 0{,}5\sin[\pi(x+0{,}5)]$, also: Periode: 2; Verschiebung: 0,5 nach links

1.4.2 $0{,}5\sin[\pi(x+0{,}5)] = -0{,}25$; $\sin[\pi(x+0{,}5)] = -0{,}5$; $\pi(x+0{,}5) = -\frac{\pi}{6}$; $x+0{,}5 = -\frac{1}{6}$; $x_1 = -\frac{2}{3}$
Man erkennt: $x_1 = -1+\frac{1}{3}$, also $x_2 = -1-\frac{1}{3}$; $x_2 = -\frac{4}{3}$;
Die restlichen Lösungen ergeben sich durch Addition der Periode (also k·2) zu x_1 bzw. x_2.

1.4.4 Δ (x) = f(x) – h(x); $\Delta(x) = -e^{-2x} + e^{-3x} - 0{,}5\sin(\pi x + 0{,}5\pi)$
$$\Delta'(x) = 2e^{-2x} - 3e^{-3x} - 0{,}5\pi\cos(\pi x + 0{,}5\pi)$$
Wegen $x_1 = x_0 - \frac{\Delta(x_0)}{\Delta'(x_0)} \Rightarrow$ (TR) $x_1 = -0{,}4 - \frac{0{,}9401}{-7{,}0032}$; $x_1 \approx -0{,}27$. (1. Näherung!)
(Bem.: Wert auf vier Nachkommastellen: x = – 0,2209 ; siehe Graphen)

GEO

1.1 k: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; die Richtungsvektoren sind gleich, also sind g und k echt parallel oder sogar identisch.

$\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + a\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$; (1) $\Rightarrow$ a = – 1,5; in (2) 3 = 4 (f)
{ oder: in (3): 0 = 3 – 1,5 (f) } $\Rightarrow$ g und k sind echt parallel.

1.2 Zweiter Richtungsvektor ist der Differenzvektor der beiden Aufhängepunkte, also
$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$ F: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} + \chi\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}$
$\vec{n} = \begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-5\\-3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} = -4$ $\Rightarrow$ F: $-5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 4 = 0$

2.1 $\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$
(1) + (2): 2 = 5 + 3μ $\Rightarrow$ μ = – 1 in (1): – 1 + 2λ = 2 – 1 ; λ = 1
λ = 1 und μ = – 1 in (3): 0 + 1 = 3 – 2 (w) $\Rightarrow$ g und h schneiden sich
$\vec{s} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ S (1 ; 1 ; 1) { oder in h einsetzen }

2.2 $S \in E$?: – 1 +4·1 +1 – 4 = 0 (w) $\Rightarrow S \in E$;

Lotgerade durch den Aufhängepunkt B von h: ℓ: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$;

$\ell \cap$ E: – (2 – σ) + 4· (3 +4σ) + 3 + σ – 4 = 0
18σ = – 9 $\Rightarrow$ σ = – 0,5 , also erhält man den Spiegelpunkt B´ mit σ = – 1
B´ (3 ; – 1; 2) ; liegt B´ auf g ? ; Einsetzen ergibt: λ = 2

{ alternativ: durch A von g ℓ: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} + \sigma\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix}$
$\ell \cap$ E: – (–1 – σ) + 4· (3 +4σ) + σ – 4 = 0
18σ = – 9 $\Rightarrow$ σ = – 0,5 , also erhält man den Spiegelpunkt A´ mit σ = – 1
A´ (0; –1 ; – 1) ; liegt A´ auf h ? ; Einsetzen ergibt: μ = – 2 }

Damit ist h eine Spiegelgerade zu g bzgl. E.