Merkblatt zur Integration (1)

Als erstes sollte man sich anschauen

1) was die Integrationsvariable ist

B.: $\int (x^3 y^2)dx \;=\; \frac{x^4}{4}y^2 + C$, da y^2 eine KONSTANTE ist

Analog: $\int (x^3 y^2)dy \;=\; x^3\,\frac{y^3}{3} + C$, da hier x^3 eine KONSTANTE ist

2) ob es sich um eine Summe (oder eine Differenz) handelt

B1.: $\int (x^2 + \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}})dx$:

$x^2 \rightarrow \frac{1}{3}x^3$; $\frac{2}{2x+3} = 2\cdot(2x+3)^{-1} \rightarrow 2\cdot \ln|2x+3| \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow (x-2)^{+\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}}$

Also: $\int (x^2 + \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}})dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln|2x+3| + \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C$ (kann man noch umformen)

Bem .: $\frac{1}{ax+b}$ nicht nach den Rechenregeln für rationale Funktionen integrieren!

Es gilt: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\cdot \ln|ax+b| + C$

B2.: $\int \frac{2+x^2}{x^4}dx$: $\frac{2+x^2}{x^4} = \frac{2}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 2x^{-4} + x^{-2} \rightarrow 2\cdot\frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-1}}{-1}$

Also: $\int \frac{2+x^2}{x^4}dx \;=\; 2\cdot\frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-1}}{-1} + C$ (kann man noch umformen)

Merkblatt zur Integration (1B)

3) ob sich ein Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen in eine Summe (Diff.) von Brüchen zerlegen lässt (Partialbruchzerlegung)

B.: $\int \frac{2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^2 + x - 3} dx$

Da der Zählergrad größer ist als der Nennergrad, folgt als erstes die Polynomdivision mit Rest:

$$\frac{2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^2 + x - 3} = x^2 + 1 + \frac{2x + 2}{2x^2 + x - 3}.$$

Also ist $\int \frac{2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^2 + x - 3} dx = \int \left(x^2 + 1 + \frac{2x+2}{2x^2 + x - 3} \right) dx$

der ganzrationale Anteil $x^2 + 1$ ist problemlos zu integrieren $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)$ (*)

Ärger macht der Rest. (Blöderweise ist nämlich der Zähler nicht die Nennerableitung).

Der Nenner lässt sich aber darstellen wie folgt: $2x^2 + x - 3 = 2 \cdot (x + 1{,}5) \cdot (x - 1)$,
da die beiden Nullstellen des Nenners – 1,5 und + 1 sind.

Der Ansatz: $\frac{2x+2}{2x^2 + x - 3} = \{\text{kürzen}\}\ \frac{x+1}{x^2 + 0{,}5x - 1{,}5} = \frac{A}{x + 1{,}5} + \frac{B}{x - 1} = \{\text{ Hauptnenner ! }\}$

$$= \frac{A \cdot (x-1) + B \cdot (x + 1{,}5)}{(x + 1{,}5) \cdot (x - 1)} = \frac{Ax - A + Bx + 1{,}5B}{(x + 1{,}5) \cdot (x - 1)} \overset{!}{=} \frac{(A+B)x + 1{,}5B - A}{(x + 1{,}5) \cdot (x - 1)}$$

liefert $A + B = 1$ (1) { das Vielfache von x }

$1{,}5\,B - A = 1$ (2) { der konstante Wert im Zähler }

Dieses LGS hat die Lösungen $A = 0{,}2$; $B = 0{,}8$

Somit wird $\int \frac{2x+2}{2x^2 + x - 3} dx = \int \frac{x+1}{x^2 + 0{,}5x - 1{,}5} dx = \int \left(\frac{0{,}2}{x + 1{,}5} + \frac{0{,}8}{x - 1} \right) dx =$

$= 0{,}2 \cdot \ln | x + 1{,}5 | + 0{,}8 \ln | x - 1 | + C$ (**)

Insgesamt gilt mit (*) und (**)

$$\int \frac{2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1}{2x^2 + x - 3} dx = \frac{x^3}{3} + x + 0{,}2 \cdot \ln | x + 1{,}5 | + 0{,}8 \ln | x - 1 | + C$$

{ Es gibt noch kompliziertere Ausdrücke und auch Sonderfälle, aber ... }

Merkblatt zur Integration (2)

Welche Integrationsmethode muss ich (vermutlich) anwenden?

a) rationale Integranden

B.: $\int (x^2 + \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}})dx$ (siehe auch Merkblatt 1)

Man kann alle Summanden mit Hilfe der Potenzgesetze umschreiben, und fast wie ganzrationale Funktionen integrieren

$x^2 \rightarrow \frac{1}{3}x^3$; $\frac{2}{2x+3} = 2\cdot(2x+3)^{-1} \rightarrow 2\cdot\ln|2x+3|\cdot\frac{1}{2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{3}} \rightarrow (x-2)^{+\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}}$

Also: $\int (x^2 + \frac{2}{2x+3} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}})dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln|2x+3| + \frac{3}{2}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C$ (kann man noch umformen)

Bem.:

Den Faktor $\cdot\frac{1}{2}$ beim 2. Term erhält man entweder durch Integration durch Substitution

oder als „Killfaktor", den man { Kettenregel !!! } zur Kompensation des Ausdrucks 2x + 3 benötigt. (Wer das nicht kennt, sollte es vorsichtshalber lieber lassen, und z:= 2x + 3 substituieren – Substitution → e), also Seite 5!)

b) Produkte aus rationalen Integranden und der Sinus – Kosinus – oder Exponentialfunktion (evtl. sinh(x) oder cosh(x))

B.: $\int x \cdot \sinh(2x)dx$.

Der erste Faktor x verschwindet beim Differenzieren, den zweiten kann man beliebig oft differenzieren oder integrieren – er ist nicht „totzukriegen". Hier sollte man partiell integrieren:

$u := x \Rightarrow u' = 1$; $v' = \sinh(2x) \Rightarrow v = \cosh(2x)\cdot\frac{1}{2}$

$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$, also $\int x \cdot \sinh(2x)dx = x\cdot\cosh(2x)\cdot\frac{1}{2} - \int 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cosh(2x)dx =$

$= x\cdot\cosh(2x)\cdot\frac{1}{2} - 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sinh(2x)$

Bem.: bei $\int x^2 \cdot \sinh(2x)dx$ müsste man zweimal dem ersten Faktor „auf den Pelz rücken", also

$u := x^2$, und zweimal partiell integrieren (leicht gemein!!!)

Merkblatt zur Integration (3)

c) Produkte aus zwei Sinus – Kosinus – oder Exponentialfunktionen
(evtl. sinh(x) oder cosh(x))

(Fachbegriff: transzendente Funktionen)

B.: $\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx$

Man kann man beliebig oft differenzieren oder integrieren – beide Faktoren sind nicht „totzukriegen“.
Hier sollte man zweimal partiell integrieren, und danach die beiden Integrale auf eine Seite bringen:

u: = e^{2x} $\Rightarrow$ u´ = $2e^{2x}$; v´: = sinx $\Rightarrow$ v = – cosx

$\int uv'dx = uv - \int u'vdx$, also

$\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx = e^{2x} \cdot (-\cos x) - \int [2e^{2x} \cdot (-\cos x)]dx$, also

$\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \int (e^{2x} \cdot \cos x)dx$,

Jetzt ist für das Integral auf der rechten Seite u: = e^{2x} $\Rightarrow$ u´ = $2e^{2x}$; v´: = cosx $\Rightarrow$ v = sinx.

Es gilt: $2\int (e^{2x} \cdot \cos x)dx = 2 \cdot \{ e^{2x} \cdot \sin x - \int (2e^{2x} \cdot \sin x)dx \}$.

Insgesamt gilt jetzt:

$\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot \{ e^{2x} \cdot \sin x - \underline{\int (2e^{2x} \cdot \sin x)dx} \}$

ausmultiplizieren: $\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x - 4\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx$, also:

$5 \cdot \int (e^{2x} \cdot \sin x)dx = -e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x$, und damit

$$\int (e^{2x} \cdot \sin x)dx = \frac{1}{5} \cdot (-e^{2x} \cdot \cos x + 2 \cdot e^{2x} \cdot \sin x)$$

Merkblatt zur Integration (4)

d) Der „Logarithmus – Trick“

$\int \ln x dx$ = ???

Hier glaubt man, kein Produkt von Funktionen vor sich zu haben (was ja de facto auch stimmt), aber man kann ein Produkt bilden, und dann mit der partiellen Integration die Lösung bestimmen, wie folgt:

u: = x $\Rightarrow$ u´ = 1; v: = lnx $\Rightarrow$ v´ = $\frac{1}{x}$

$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$, also

$\int (1 \cdot \ln x) dx$ = x · lnx – $\int x \cdot \frac{1}{x} dx$, also

$\int (1 \cdot \ln x) dx$ = x · lnx – $\int 1 \cdot dx$ = x · lnx – x

Anwendungsbeispiel :

$\int \arctan x \cdot dx$ = ???

u: = x $\Rightarrow$ u´ = 1; v: = arctanx $\Rightarrow$ v´ = $\frac{1}{1+x^2}$

$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$, also

$\int 1 \cdot \arctan x \cdot dx$ = x·arctanx – $\int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$.

Bem.: Das Integral auf der rechten Seite ist von der Form $\frac{g'}{g}$ *mit der Stammfunktion ln I g I*

(Allgemein Quotient: $\frac{\text{Nennerableitung}}{\text{Nenner}}$ *; Stammfkt ist: ln I Nenner I .*
Das erhält man aber auch mit der Substitution z: = „Nenner“)

Damit folgt: $\int 1 \cdot \arctan x \cdot dx$ = x·arctanx – $\frac{1}{2}$ ln I 1 + x^2 I + C

{ Da 1 + x^2 > 0 in IR, kann man die Betragstriche durch runde Klammern ersetzen }

Merkblatt zur Integration (5)

e) die Substitution

d1) Wie schon auf der Seite 4 erwähnt, lassen sich Integrale der Form $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$

mit Hilfe der Substitution z:= g(x) lösen wie folgt:

$\frac{dz}{dx} = g'(x) \quad \Rightarrow dx = \frac{dz}{g'(x)}$, also: $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{g'(x)}{z} \cdot \frac{dz}{g'(x)}$ = ln | z | + C = ln | g(x) | + C

Diese Sonderform kann man als Formel verwenden!

B1.: $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$ = – ln | cosx | + C

B2.: $\int \frac{3x^2 - 2x}{x^3 - x^2 + a} dx$ = ln | $x^3 - x^2 + a$ | + C für jeden beliebigen Wert von a

d2) Erfolgversprechend ist die Substitution auch bei der Form

$\int$ "*Funktion*" · "*innere Ableitung der Funktion nach der Kettenregel*" dx

B.: $\int (\sin^n x \cdot \cos x)dx$

z: = sinx; $\frac{dz}{dx} = \cos x$; $\Rightarrow dx = \frac{dz}{\cos x}$, also

$$\int (\sin^n x \cdot \cos x)dx = \int z^n \cdot \cos x \cdot \frac{dz}{\cos x} = \int z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} + C = \frac{1}{n+1} \sin^{n+1} x + C$$

Wer sich nicht sicher ist, ob seine Integration richtig ist, kann das Ergebnis durch Differenzieren bestätigen (hoffentlich).

to be continued ... !!! ???